UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL: TIPO C

[duración : una hora y 45 minutos]

SOLUCIONES

SE1.- (10 ptos.)
1a) Halle una ecuación del plano, α , que pasa por los puntos
A(1, 2, 3), B(2, -1, 0) y es perpendicular al plano, β , de ecuación x+2y - 3z = 1;
la ecuación del plano buscado será del tipo : $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$ y
el vector (a, b, c) , perpendicular al plano α , deberá ser perpendicular a los vectores
AB = (1,-3,-3) y (1, 2,-3) [este último, vector perpendicular al plano β].

Por consiguiente, podemos usar el vector (a, b, c) = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ = (15, 0, 5) o tambien

(a, b, c) = (3, 0, 1) [vector paralelo al anterior];
Una ecuación del plano α es entonces : 3(x-1)+0(y-2)+1.(z-3)= 0, 3x+z - 6 = 0.
1b) halle la distancia del plano α al punto Q(1, 2, -3) ;

$$d(\alpha, Q) = \frac{|ax_Q+by_Q+cz_Q+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|3+0-3-6|}{\sqrt{9+0+1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}\ .$$

1c) halle ecuaciones paramétricas de la recta de intersección del plano α ,
con el plano 0xy.
Haciendo sistema entre las ecuaciones del plano α y del plano 0xy :

$$\begin{cases} 3x+z-6=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} .$$

SE2.- (4 ptos.) Dados los ptos. A(2, 5, 7), B(1, 0, 1) y el vector **v** = (2, 3,-6) , halle la proyección , $\text{Proy}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$, del vector **u**=**AB** sobre el vector **v** .

$$\text{Proy}_{\mathbf{v}}(\mathbf{AB}) = \frac{(\mathbf{AB}.\mathbf{v})\ \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{(-1,-5,-6)(\ 2, 3,-6)}{49}(2, 3,-6) = \frac{19}{49}(2, 3,-6) = \left(\frac{38}{49}, \frac{57}{49}, \frac{-114}{49}\right).$$

SE3.- (6 ptos.) Dados en el espacio vectorial, $\mathbf{P_3}$, [de los polinomios de grado menor o igual que 3], los tres polinomios : $p_1= t^3 - 2t+5$, $p_2= 2t^2 -3t$, $p_3= t+3$,
3a.halle las condiciones para que el polinomio at^3+bt^2+ct+d pertenezca al subespacio E= gen{p_1, p_2 ,p_3};
El polinomio at^3+bt^2+ct+d pertenece al subespacio W si y sólo si existen números x_1 , x_2 , x_3 tales que : $x_1(t^3 - 2t+5)+x_2(2t^2 -3t)+x_3(t+3) = at^3+bt^2+ct+d$, $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1)t^3+(2x_2)t^2+(-2x_1-3x_2+x_3)t+(5x_1+3x_3) = at^3+bt^2+ct+d$ luego el polinomio at^3+bt^2+ct+d pertenece al subespacio W si y sólo si es consistente el siguiente sistema :

$$\begin{cases} x_1=a \\ 2x_2=b \\ -2x_1-3x_2+x_3 = c \\ 5x_1+3x_3= d \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & b \\ -2 & -3 & 1 & c \\ 5 & 0 & 3 & d \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b/2 \\ 0 & -3 & 1 & c+2a \\ 0 & 0 & 3 & d-5a \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 0 & 1 & c+2a+(3/2)b \\ 0 & 0 & 0 & d-5a-3c-6a-(9/2)b \end{array}\right] \Rightarrow$$

el sistema es consistente si y sólo si d-5a-3c-6a-(9/2)b = (-1)(22a+9b+6c-2d)/2 = 0,

si y sólo si 22a+9b+6c-2d = 0.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL: TIPO C
[duración : una hora y 45 minutos]

SOLUCIONES

3b. diga, justificando, si el polinomio $p_4 = -t^3 + 4t + 1$ pertenece o no al subespacio E.
Como para este polinomio a = -1 , b=0, c=4 , d= 1 y se tiene :
22a+9b+6c-2d = -22+0+24-2 = 0 , el polinomio p_4 pertenece al subespacio considerado.

4. (5 ptos) En el espacio vectorial, V, de todas las matrices de tamaño 2x2 , averigüe para cada uno de los subconjuntos que se definen a continuación, si es o no es subespacio de V :
4a. W_1 = subconjunto de todas las matrices equivalentes por filas a la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$;
W_1 no es subespacio. En efecto , sabemos que aplicando operaciones elementales de fila a una matriz con determinante no nulo se obtiene una matriz que tambien tiene determinante no nulo [y aplicando operaciones elementales de fila a una matriz con determinante nulo se obtiene una matriz que tambien tiene determinante nulo] Por lo tanto, como la matriz dada tiene determinante no nulo, cualquier matriz equivalente por filas a esta matriz, deberá ser invertible. Entonces podemos observar que la matriz nula no pertenece a W_1 o que no se cumple la propiedad de cierre respecto a la suma, ya que la suma de dos matrices invertibles puede ser una matriz no invertible como ilustra el siguiente ejemplo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4b. $W_2 = (A \in M_{2,2} \,|\, A = \mathrm{Adj}(A)\}$ = subconjunto de todas las matrices , A, que son iguales a su adjunta.
W_2 es subespacio. En efecto la adjunta de una matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es :
$\mathrm{Adj}(A)= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ de manera que $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\mathrm{Adj}(A)= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ se cumple si y sólo si :
a-d = b = c = 0.
Entonces podemos observar que la matriz nula pertenece a W_2 ;
si $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in W_2$ entonces se cumple que
$a_{11}- a_{22}=a_{12}=a_{21}=0$, $b_{11}- b_{22}=b_{12}=b_{21}=0$ y por consiguiente para la matriz suma,
$C=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]= A+B$ se cumple :

$$\begin{cases} c_{11}-c_{22}= (a_{11}+b_{11})-(a_{22}+b_{22})= (a_{11}-a_{22})+(b_{11}-b_{22})=0+0=0 \\ c_{12}=a_{12}+b_{12}=0+0=0 \\ c_{21}=a_{21}+b_{21}=0+0=0 \end{cases}$$

luego $C=A+B\in W_2$ [cierre de W_2 respecto a la suma];
si $D=\lambda A$ y si $A=[a_{ij}] \in W_2$, $\lambda\in R$, entonces se cumple que $a_{11}- a_{22}=a_{12}=a_{21}=0$ y por consiguiente :

$$\begin{cases} c_{11}-c_{22}= \lambda a_{11}-\lambda a_{22}= \lambda(a_{11}-a_{22})=\lambda 0=0 \\ c_{12}=\lambda a_{12}=\lambda 0=0 \\ c_{21}=\lambda a_{21}=\lambda 0=0 \end{cases}$$

luego $D=\lambda A \in W_2$, [cierre de W_2 respecto a la multiplicación por números].